

ПРИМЈЕРИ ЗАДАТАКА ИЗ МАТЕМАТИКЕ
за полагање квалификационог испита

1. Упростити израз

$$\left(\frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{2x + 8}{x^2 + 12x + 35} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} \right)^2 \cdot \frac{(x + 1)^2 + 12x + 48}{2}.$$

Рјешење: 2, $x \neq -5, x \neq -6, x \neq -7$.

2. Ријешити неједначину

$$\frac{2x}{3x - 4} + 7 \geq \frac{3 - 5x}{8 - 6x} - 4.$$

Рјешење: $x \in (-\infty, \frac{17}{13}] \cup (\frac{4}{3}, +\infty)$

3. У скупу реалних бројева ријешити једначину

$$x^4 - 37x^2 + 36 = 0.$$

Рјешење: $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = -6, x_4 = 6$.

4. Ријешити систем једначина

$$\begin{aligned} xy &= 100 \\ \log^2 x + \log^2 y &= 10. \end{aligned}$$

Рјешење: $R_s = \left\{ \left(\frac{1}{10}, 1000 \right), \left(1000, \frac{1}{10} \right) \right\}$.

5. Израчунати вриједности тригонометријских функција оштрог угла α у правоуглом троуглу чије је катета $a = 5 \text{ cm}$ и хипотенуза $c = 13 \text{ cm}$.

Рјешење: $\sin \alpha = \frac{5}{13}, \cos \alpha = \frac{12}{13}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{12}{5}$.

1. Ријешити једначину

$$\frac{1}{15x - 10} - \frac{5 - x}{27x^3 - 54x^2 + 36x - 8} = \frac{1.2x - 1}{18x^2 - 24x + 8}.$$

Рјешење: $x = 4$.

2. Ријешити неједначину

$$\frac{5 - x}{x^2 - 3x + 2} > 1.$$

Рјешење: $x \in (-1, 1) \cup (2, 3)$.

3. Ријешити систем једначина

$$\begin{aligned} 5^x \cdot 8^y &= 512000 \\ x + y &= 7. \end{aligned}$$

Рјешење: $R_s = \{(3, 4)\}$.

4. У скупу реалних бројева ријешити једначину

$$\log(x + 2) + \log(x - 1) = 1.$$

Рјешење: $x = 3$.

5. Израчунати

$$\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{2 \sin \alpha + 3 \cos \alpha},$$

ако је $\operatorname{tg} = \frac{1}{2}$.

Рјешење: $-\frac{1}{8}$.

1. У зависности од реалног параметра m ријешити систем једначина:

$$\begin{aligned}(m+5)x + (m+1)y &= 16 \\ 2x + 4y &= m+1.\end{aligned}$$

Рјешење:

$$\text{за } m \in \mathbb{R} \setminus \{-9\} \quad R_s = \left\{ \left(\frac{7-m}{2}, \frac{m-3}{2} \right) \right\},$$

$$\text{за } m = -9 \quad R_s = \{(-4 - 2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

2. Ријешити систем једначина

$$\begin{aligned}x + 3y &= 18 \\ xy &= 15.\end{aligned}$$

Рјешење: $R_s = \{(3, 5), (15, 1)\}$.

3. У скупу реалних бројева ријешити једначину

$$3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} 9^{x+1}.$$

Рјешење: $x = -\frac{1}{2}$.

4. Ријешити неједначину

$$\log_{\frac{1}{5}}(x-1) > -3.$$

Рјешење: $x \in (1, 126)$.

5. У скупу реалних бројева ријешити једначину

$$2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = 1.$$

Рјешење: $x \in \left\{ -\frac{\pi}{24} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{7\pi}{24} + m\pi \mid m \in \mathbb{Z} \right\}$.

1. Упростити израз

$$\left(\frac{x-6}{18x+(x-6)^2} + \frac{(x+12)^2-108}{x^3-216} - \frac{1}{x-6} \right) : \frac{x^3+6x^2+18x+108}{x^3-6x^2+18x-108}.$$

Рјешење: $\frac{1}{x+6}$, $x \neq -6, x \neq 6$.

2. Ријешити систем једначина

$$\begin{aligned} x + 3y - 7z &= 6 \\ -3x + 2y + 8z &= 9 \\ -5x + 9y - 2z &= 3. \end{aligned}$$

Рјешење: $R_s = \{(9, 6, 3)\}$.

3. У скупу реалних бројева ријешити једначину

$$3 \log^2(x-1) - 10 \log(x-1) + 3 = 0$$

Рјешење: $x_1 = 1 + \sqrt[3]{10}, x_2 = 1001$.

4. Ријешити неједначину

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{2x+5} < \frac{64}{125}.$$

Рјешење: $x \in (-1, +\infty)$.

5. У скупу реалних бројева ријешити једначину

$$\cos 2x - \cos x + 1 = 0.$$

Рјешење: $x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{3} + 2m\pi \mid m \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2l\pi \mid l \in \mathbb{Z} \right\}.$

1. Ријешити неједначину

$$\frac{x-2}{x-4} < \frac{3}{2}.$$

Рјешење: $x \in (-\infty, 4) \cup (8, +\infty)$

2. Ријешити систем једначина

$$\begin{aligned}x + 2y - 3z &= 2 \\ -2x - y + z &= 3 \\ 3x + 3y - 2z &= 2.\end{aligned}$$

Рјешење: $R_s = \left\{ \left(-\frac{19}{6}, \frac{29}{6}, \frac{3}{2} \right) \right\}.$

3. Одредити реални и имагинарни дио комплексног броја

$$z = \frac{(1-i)^2}{\sqrt{3}-i}.$$

Рјешење: $R_e(z) = \frac{1}{2}, I_m(z) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

4. У скупу реалних бројева ријешити једначину

$$5x^4 - 26x^3 + 26x - 5 = 0.$$

Рјешење: $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = \frac{1}{5}, x_4 = 5.$

5. У скупу реалних бројева ријешити једначину

$$5^x + \left(\frac{1}{2} \right)^{x-1} \cdot 10^x = 375.$$

Рјешење: $x = 3.$

1. Упростити израз

$$\frac{1}{x(x-y)(x-z)} - \frac{1}{y(z-y)(y-x)} + \frac{1}{z(z-x)(z-y)}.$$

Рјешење: $\frac{1}{xyz}$, $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0, x \neq y, x \neq z, y \neq z$.

2. Ријешити неједначину

$$1 < \frac{3x + 13}{x + 8} < 2.$$

Рјешење: $x \in (-\frac{5}{2}, 3)$.

3. Ријешити систем једначина

$$\begin{aligned} 2y - 3x &= 2 \\ 2x^2 - 3y^2 + x - y + 42 &= 0. \end{aligned}$$

Рјешење: $R_s = \{(-4, -5), (2, 4)\}$.

4. У скупу реалних бројева ријешити једначину

$$\sqrt{32^{4x-6}} = 0.25 \cdot 128^{2x-3}.$$

Рјешење: $x = 2$.

5. Израчунати: (a) $\sin \frac{5\pi}{6}$, (b) $\sin \frac{81\pi}{4}$.

Рјешење: (a) $\frac{1}{2}$, (b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.